1 Indice simple en base 100

Pourquoi travailler avec des indices :
Ce sont des outils qui permettent de comparer les évolutions de deux séries contemporaines dont les ordres de grandeur diffèrent beaucoup. Par exemple, si on compare l'évolution des populations de Paris, Grenoble et Roubaix, cela n'aura pas beaucoup de sens de les représenter sur un même graphique (Grenoble et Roubaix seront écrasées tout en bas). En revanche, si l'on représente les indices de ces populations, on perd l'information sur leurs niveaux, mais on peut comparer leurs rythmes de croissance.

Définition :
Soit y_2 et y_1 deux nombres réels strictement positifs.

- L'indice simple en base 100 (indice) de y_2 par rapport à y_1 est le nombre strictement positif $I_{2/1}$ donné par :

$$\boxed{I_{2/1} = 100 \times \frac{y_2}{y_1}}$$

On peut représenter la situation à l'aide d'un tableau de proportionnalité :

y_1	y_2
100	$I_{2/1}$

- On peut remarquer que l'indice de y_2 par rapport à y_1 est donné par $\boxed{I_{2/1} = 100 \times k}$ où k est le coefficient multiplicateur de y_1 à y_2.

Exemple : Indice de vente de voiture

Un concessionnaire a vendu 800 voitures en janvier 2016 puis 750 en février 2016.
L'indice des ventes en mars est de 125.
Calculer l'indice des ventes en février, base 100 en janvier.
Déterminer le nombre de ventes en mars 2016.

Propriété :

- Un indice est toujours strictement positif.
- Un indice supérieur à 100 correspond à une augmentation.
- Un indice inférieur à 100 correspond à une réduction.

Lien entre indice et taux d'évolution
Les relations entre l'indice $I_{2/1}$ de y_2 par rapport à y_1 et le taux d'évolution t de y_1 à y_2 sont :

$$I_{2/1} = 100 \times k = 100 \times (1+t) = 100 + 100t \qquad \boxed{t = \frac{I_{2/1} - 100}{100}}$$

Retour à l'exemple :
Dans l'exemple précédent, l'indice est de 93,75. Le taux d'évolution t est donné par :

$t = \frac{I_{2/1}-100}{100} = \frac{93{,}75-100}{100} = -6,25\%.$

Le nombre des ventes a donc diminué de 6,25%.

2 Racine n-ième d'un nombre réel positif ou nul

Définition

Soient a un nombre réel positif ou nul et n un nombre entier naturel non nul.
On demontre que **l'équation** $x^n = a$ **admet une solution unique dans l'intervalle** $[0; +\infty[$.
Cette solution est notée $a^{\frac{1}{n}}$ et se nomme **racine n-ième de a**.

Exemples classiques

- cas $n = 2$: $a^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée (deuxième) de a ; ainsi $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.
- cas $n = 3$: $a^{\frac{1}{3}}$ est la racine cubique (troisième) de a.

Exercice 1

Déterminer la racine n-ième de chacun des nombres a suivants pour le nombre n indiqué. On donnera la valeur exacte ou la valeur décimale arrondie à 10^{-4} près.

1) $a = 20736 \qquad n = 4$ 2) $a = 6 \qquad n = 7$ 3) $a = 0,58 \qquad n = 20$

Exercice 2

Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ chacune des équations suivantes. On donnera la valeur exacte ou la valeur décimale arrondie à 10^{-3} près.

1) $x^5 = 16807$ 2) $x^{10} = 3$ 3) $x^{13} = 0,64$

3 Taux dévolution

3.1 Taux d'évolution globale

Exemple

Le chiffre d'affaire d'une entreprise a augmenté de 7% de 2011 à 2013 et de 4% de 2013 à 2016.
On désire connaître le taux d'évolution de 2011 à 2016.

$$C_{2011} \xrightarrow{\times(1+7\%)} C_{2013} \xrightarrow{\times(1+4\%)} C_{2016}$$

On en déduit que le coefficient multiplicateur global est $k = (1 + 7\%) \times (1 + 4\%) = 1,1128$

Donc le taux d'évolution globale est donnée par :

$$T = k - 1 = 1,1128 - 1$$

d'où $T = 11,28\%$.
Le taux d'évolution globale de 2013 à 2016 est de 11,28%.

Définition : Taux d'évolution globale

Soit y_0, y_1, y_2, ..., y_n les n évolutions. On désigne par t_1, t_2, ..., y_n les taux d'évolutions de ces n évolutions.

$$y_O \xrightarrow{\times(1+t_1)} y_1 \xrightarrow{\times(1+t_2)} y_2 \cdots y_{n-1} \xrightarrow{\times(1+t_n)} y_n$$

On a $(1 + T) = (1 + t_1) \times (1 + t_2) \ldots \times (1 + t_n)$
Le taux d'évolution globale T de y_0 à y_n est égale à :

$$\boxed{T = (1 + t_1) \times (1 + t_2) \ldots \times (1 + t_n) - 1}$$

3.2 Taux d'évolution moyen

Soit n évolutions successives de même taux t_M, appelé taux moyen, qui permettent d'obtenir le même nombre y_n en partant de y_0.

$$y_O \xrightarrow{\times(1+t_M)} y_1 \xrightarrow{\times(1+t_M)} y_2 \cdots y_{n-1} \xrightarrow{\times(1+t_M)} y_n$$

On obtient l'égalité $1 + T = \overbrace{(1 + t_M) \times \ldots (1 + t_M)}^{n \text{ fois}} = (1 + t_M)^n$
d'où $t_M = (1 + T)^{\frac{1}{n}} - 1$
Le taux d'évolution moyen t_M est donné par :

$$\boxed{t_M = (1 + T)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Exemple : taux de chômage.

Le nombre de chômeurs d'un pays a augmenté de 5% en un an.
On désire connaître le taux d'évolution mensuel moyen du nombre de chômeurs.
On a $T = 5\% = 0,05$ et $n = 12$ donc $t_M = (1 + T)^{\frac{1}{n}} - 1$ soit $t_M = (1 + 5\%)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0,41\%$

Exercice

Le prix d'un produit a successivement baissé de 20%, augmenté de 20%, baissé de 10% et augmenté de 10%. Calculer le taux moyen des quatre évolutions successives du prix (donner la valeur décimale arrondie à 0,01% près).